7. Stunde

Thursday, April 29, 2010
14:11

Sie kennen bereits <u>Wahrheitstabellen</u>:

Bsp 1: $\varphi \equiv A \to \neg A$

A	$\neg A$	φ
w	f	f
f	w	w

→ φ ist keine Tautologie, aber erfüllbar

Bsp 2: $\varphi \equiv (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	φ
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

→ φ ist Tautologie

Wir haben also Algorithmus, um zu entscheiden ob aussagenlog. Formel eine Tautologie ist (= allgemeingültig), ob sie erfüllbar ist oder unerfüllbar (= Kontradiktion, Widerspruch).

Formalere Def:

Sei M beliebige(*) Menge der Aussagenvariablen

Das Alphabet (= Mg der "Buchstaben") Σ ist $M \cup \{(,),\neg,\wedge\}$

Zeichenketten (= Strings) Σ^* sind endliche Folgen aus Σ.

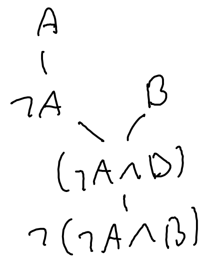
Bsp: $((\neg\neg$ und $(A \wedge B)$ sind Strings (vorausgesetzt $A, B \in M$)

(*) Bem: Wir nehmen natürl. an dass $(,),\neg,\wedge \notin M$.

Eine (aussagenlogische) Formel ist def. durch:

- Jedes El von M ist Formel
- wenn φ, ψ Formeln sind, dann auch die Zeichenketten $(\varphi \wedge \psi)$ und $\neg\varphi$

Lem (ohne Bew): Formeln sind eindeutig lesbar, d.h. auf eindeutige Weise aus kleineren Formeln aufgebaut (Bem: Dazu brauchen wir die Klammern)
ZB ist $\neg(\neg A \wedge B)$ so aufgebaut:



<u>Abkürzungen</u>: Wir verwenden die folgenden Abkürzungen: (d.h. nicht als Teil der formalen Sprache, aber informell):

$$(\varphi \vee \psi) := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$(\varphi \to \psi) := (\neg\varphi \vee \psi)$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$$

außerdem lassen wir oft "unnötige" Klammern weg etc.

<u>Def</u> Eine Belegung μ ist Abb $\mu : \Pi \to \{w, f\}$
Wegen Eindeutiger Lesbarkeit ist folgende Def zulässig:
$\bar{\mu}$: Formeln $\to \{w, f\}$ ist die Fortsetzung von μ auf alle Formeln, def durch:

$$\bar{\mu}(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} w, \text{ wenn } \bar{\mu}(\varphi) = w \text{ und } \bar{\mu}(\psi) = w \\ f \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\bar{\mu}(\neg\varphi) = \begin{cases} f \text{ wenn } \bar{\mu}(\varphi) = w \\ w \text{ sonst} \end{cases}$$

In Wahrheitstabelle: $\varphi \equiv A \to \neg B$

	A	B	φ	
$\mu \cong \to$	$\boxed{w}$	$\boxed{w}$	f	$\leftarrow \bar{\mu}(\varphi)$
	$\vdots$		$\vdots$	

Jede Zeile entspr. einer Belegung.

<u>Def</u>: (·) φ ist Tautologie, wenn $\bar{\mu}(\varphi) = w$ für alle Bel. μ (auch: „allgemeingültig")

(·) φ ist erfüllbar, wenn $\bar{\mu}(\varphi) = w$ für eine Bel μ

(·) Andernfalls ist φ unerfüllbar (auch: Widerspruch, Kontradiktion).

Aussagenlogik ist sehr simpel. Insbesondere gilt: (vgl. Wahrheitstabelle)

(·) Es ist entscheidbar, ob φ Tautologie ist

(·) Genauso für erfüllbar

Bem: Der offensichtliche Algorithmus ist exponentiell (in Anzahl der Aussagenvariablen).
„P=NP" ist die Aussage, dass es auch einen polynomiellen Alg. gibt.
Ob P=NP gilt ist unbekannt (das bekannteste offene Problem der theoret. Inf.)